
ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN DER METHODE DER INTEGRALBEDINGUNGEN FÜR DEN IMPULS BEI DER LÖSUNG DER PROBLEMATIK DER SCHEIBENROTATION IN NICHT-NEWTONSCHEN FLÜSSIGKEITEN

P. MITSCHKA

*Institut für theoretische Grundlagen der chemischen Technik,
Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften, 165 02 Prag 6 - Suchbát*

Eingegangen am 4. Juli 1975

Analysiert werden die Möglichkeiten einer Näherungslösung des Problems der Rotation einer unendlich dünnen Scheibe in ansonst ruhenden nicht-Newton'schen Potenzflüssigkeiten. Die Methode basiert auf den entsprechenden Integralbedingungen für den Impuls, die sich aus den Bewegungsgleichungen der laminaren Grenzschicht ergeben. Die Genauigkeit der derart errechneten Ergebnisse wird mit den theoretischen (exakten) Werten des Reibungsmoments der rotierenden Scheibe verglichen. Diskutiert wird gleichfalls die Anwendbarkeit eines analogen Rechenganges für die Berechnung des Stoff- oder Wärmetransports in der Umgebung rotierender Scheiben. Bei plausibler Wahl der zugehörigen Geschwindigkeitsprofile liefert die Näherungslösung befriedigende Resultate.

Ziel dieser Mitteilung ist es, die Möglichkeiten einer relativ einfachen Methode der Lösung des Problems der Rotation einer unendlich dünnen Scheibe in unendlich ausgedehnten ansonst ruhenden nicht-Newton'schen Potenzflüssigkeiten aufzuzeigen, und dies bei Benutzung der integrierten Form der entsprechenden Gleichungen der laminaren Grenzschicht, der sog. Integralbedingungen für den Impuls. Eine analog formulierte Aufgabe behandelte bereits Tomita¹; seine Resultate sind – wie auf anderer Stelle gezeigt² – aus mehreren Gründen praktisch nicht benutzbar. Das in dieser Arbeit in Vorschlag gebrachte, der Karmán-Pohlhausen-Methode analoge Näherungsverfahren führt zu wesentlich einfacheren Rechenbeziehungen, als das von Tomita¹ angewandte, wiewohl es korrektere und somit auch kompliziertere Ansätze für die fundamentalen rheologischen Zustandsgleichungen benutzt.

Die Genauigkeit der Näherungslösung kann durch Vergleich mit den Ergebnissen der exakten Lösung (der Theorie) des gleichen Problems^{3,4} getestet werden, und dies sowohl vom Standpunkt ihrer Anwendbarkeit für die approximative Bestimmung des Reibungswiderstandes von rotierenden Scheiben, wie auch für deren eventuelle Anwendung bei der Lösung von Transportproblemen (Stoff- und Wärmeübergang) in der Umgebung rotierender Scheiben. Es kann angenommen werden, daß die bei einer solchen Analyse gewonnenen Resultate auch eine weitere Nutzung bei der

Lösung der Problematik von Drehströmungen nicht-Newtonscher Flüssigkeiten finden könnten.

THEORETISCHER TEIL

Gehen wir von den über die Grenzschichtdicke integrierten Bewegungsgleichungen aus, die die Strömungsverhältnisse in einer voll dreidimensionalen axialsymmetrischen Grenzschicht in der nahen Umgebung einer rotierenden Scheibe wiedergeben (siehe z. B.⁵)

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^\delta \mathbf{v}_r \mathbf{v}_\varphi dz \right) = - \frac{r^2}{\varrho} \tau_{\varphi z} \Big|_{z=0}, \quad (1)$$

$$\int_0^\delta \mathbf{v}_\varphi^2 dz - \frac{d}{dr} \left(r \int_0^\delta \mathbf{v}_r^2 dz \right) = \frac{r}{\varrho} \tau_{rz} \Big|_{z=0}.$$

In der angeführten Form gelten die Impulsbedingungen (1) für jede beliebige reinviskose Flüssigkeit (ohne Fließgrenze). Für die Strömung sog. Ostwald-de-Waelescher Potenzflüssigkeiten in einer (laminaren) Grenzschicht muß das Gleichungssystem (1) noch durch folgende rheologische Zustandsgleichungen ergänzt werden:

$$\tau_{\varphi z} \Big|_{z=0} = K \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0}^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial z} \right)_{z=0}^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \mathbf{v}_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (2)$$

$$\tau_{rz} \Big|_{z=0} = K \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0}^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial z} \right)_{z=0}^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Eine solche Schreibweise steht in Übereinstimmung mit der Forderung der Invarianz der Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor bei jeder allgemeinen nicht eindimensionalen Strömung (siehe z. B.⁶). Sie ist somit korrekter als die von Tomita¹ angesetzten einfacheren, immer nur mit einer Komponente des Deformationsgeschwindigkeitstensors arbeitenden Beziehungen $\tau_{\varphi z} \Big|_{z=0} = K (\partial \mathbf{v}_\varphi / \partial z)_{z=0}^n$ und $\tau_{rz} \Big|_{z=0} = K (\partial \mathbf{v}_r / \partial z)_{z=0}^n$, die das oben angeführte Invarianzprinzip nicht erfüllen. Die entsprechenden Randbedingungen des zu lösenden Problems lauten dann

$$z = 0 : \mathbf{v}_r = 0, \quad \mathbf{v}_\varphi = r\omega \quad (3)$$

(Haftbedingung an der Scheibenoberfläche),

$$z = \delta : \mathbf{v}_r = 0, \quad \mathbf{v}_\varphi = 0.$$

Wahl der Geschwindigkeitsprofile

Bei Durchführung der Näherungsrechnungen ist es nötig⁷ vor Anfang des eigentlichen Lösungsvorganges der Integralbedingungen (1) für beide dort auftretenden Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v}_r und \mathbf{v}_ϕ plausible „Profile“, d.h. deren Abhängigkeiten von der Position in der Grenzschicht, zu wählen. Die zwei Gleichungen des Systems (1) ermöglichen somit als Endresultat zwei am Anfang des Rechenvorganges vorerst unbekannte Größen zu bestimmen: eine von ihnen ist die (approximative) Dicke der Grenzschicht δ , mit der vorteilhaft die Axialkoordinate z normalisiert werden kann, als zweite tritt bei Rotationsströmungen üblicherweise der sog. dimensionslose Formparameter α hinzu, der den Verlauf der Geschwindigkeiten in unmittelbarer Nähe der Scheibenoberfläche charakterisiert.

Die Wahl der Form der beiden Geschwindigkeitsprofile ist ziemlich beliebig; gewisse Beschränkungen an ihre konkreten Formen ergeben sich in erster Reihe aus den physikalisch sinnvollen Randbedingungen des zu lösenden Problems (für die Scheibenrotation z. B. aus den Bedingungen (3)), eventuell aus weiteren zusätzlichen Relationen (siehe nachstehenden Text). Im Hinblick auf den approximativen Charakter der benutzten Methode werden im allgemeinen nicht allzu komplizierte Formen für die Geschwindigkeitsprofile gewählt; allerdings besteht das Bestreben für einen bestimmten Typ von Problemen solche Profile ausfindig zu machen, die bei den auch exakt lösbaren Fällen zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit den (gewöhnlich numerisch berechneten) exakten Lösungen führen. Bei der Anwendung der Integralbedingungen für den Impuls wird nämlich vorausgesetzt, daß derart verifizierte Profile mit annähernd gleicher Genauigkeit auch für Probleme entsprechen werden, die ihrem Typ nach mit dem beglaubigten Fall analog sind, die aber ihrer Struktur nach exakt nur schwierig, oder praktisch überhaupt nicht zu lösen wären.

Mit dem Ziel eine weitgehende Einfachheit des weiteren Rechenvorganges beizubehalten, wollen wir für die dimensionslose Geschwindigkeitsprofile \mathcal{F} ($\mathcal{F} \equiv \mathbf{v}_\phi/r\omega$) und \mathcal{G} ($\mathcal{G} \equiv \mathbf{v}_r/\alpha r\omega$) im weiteren nur Ansätze folgender Eigenschaften erwägen:

1. Es soll sich um einfache funktionelle Abhängigkeiten lediglich von der dimensionslosen axialen Veränderlichen $Z = z/\delta$ handeln, die explizit weder δ noch α enthalten. Für Werte von $Z \in \langle 0, 1 \rangle$ führen diese Beziehungen zu nichtnegativen Werten von $\mathcal{F}(Z)$ und $\mathcal{G}(Z)$.

2. Die gewählten Relationen $\mathcal{F}(Z)$ und $\mathcal{G}(Z)$ müssen nicht nur folgenden (dimensionslosen) Randbedingungen (siehe Gl. (3))

$$Z = 0 : \mathcal{F} = 1, \quad \mathcal{G} = 0, \quad (4)$$

$$Z = 1 : \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G} = 0,$$

sondern auch weiteren zusätzlichen Verträglichkeitsbedingungen auf dem äußeren

Rand der Grenzschicht genügen:

$$Z = 1 : \mathcal{F}' = d\mathcal{F}/dZ = 0, \quad \mathcal{G}' = d\mathcal{G}/dZ = 0, \quad (5)$$

die den asymptotischen Anschluß an den Bereich der Strömung außerhalb der Grenzschicht sicherstellen. (Was weitere mögliche Randbedingungen anbelangt, siehe Anhang.)

3. In Übereinstimmung mit der physikalischen Realität und der exakten Lösung³ müssen die Gradienten beider Komponenten des Geschwindigkeitsvektors an der Scheibenoberfläche ($Z = 0$) die Relationen $\mathcal{F}'(0) < 0$ und $\mathcal{G}'(0) > 0$ erfüllen.

Wir werden zeigen können, daß ungeachtet dieser Beschränkungen genügend flexible Klassen von Geschwindigkeitsprofilen aufgefunden werden können, die bei Anwendung dieses Näherungsverfahrens zu befriedigenden Endresultaten führen.

Lösung der Integralbedingungen (1)

Für Geschwindigkeitsprofile, die die soeben angeführten Eigenschaften aufzeigen, können die Integralbedingungen (1) besonders leicht gelöst werden. Zwecks Vereinfachung der nachfolgenden Gleichungen führen wir vorerst die Bezeichnungen

$$k_1 = \int_0^1 \mathcal{G}^2 dZ, \quad k_2 = \int_0^1 \mathcal{F}^2 dZ, \quad k_3 = \int_0^1 \mathcal{F}\mathcal{G} dZ \quad (6)$$

ein. Eingesetzt in das Gleichungssystem (1) resultiert nach einfachen Zwischenrechnungen, nach Ausdifferenzieren bei der Annahme $\delta = \delta(r)$ und Einführung der dimensionslosen approximativen Grenzschichtdicke

$$\zeta_{0,a} = \delta \left(\frac{\omega^{2-n} r^{1-n}}{N} \right)^{1/(n+1)} \quad (7)$$

das Gleichungssystem

$$\frac{d\zeta_{0,a}^{n+1}}{dr} + (3 + 5n) \frac{\zeta_{0,a}^{n+1}}{r} = - \frac{(n+1)}{k_3 \alpha r} [\alpha^2 \mathcal{G}'(0)^2 + \mathcal{F}'(0)^2]^{(n-1)/2} \mathcal{F}'(0) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\zeta_{0,a}^{n+1}}{dr} + \left[2(2n-1) - \frac{k_2(n+1)}{k_1 \alpha^2} \right] \frac{\zeta_{0,a}^{n+1}}{r} = \\ & = - \frac{(n+1)}{k_1 \alpha r} [\alpha^2 \mathcal{G}'(0)^2 + \mathcal{F}'(0)^2]^{(n-1)/2} \mathcal{G}'(0), \end{aligned}$$

aus dem dann – wiederum in Übereinstimmung mit der exakten Lösung³ – auch $\zeta_{0,a} = \text{const.}$ folgt. Für einen vorgegebenen Wert des Fließindex n , der einen Parameter des zu lösenden Problems darstellt, und für im voraus angenetzte Geschwindigkeitsprofile $\mathcal{F}(Z)$ und $\mathcal{G}(Z)$, d. h. für bekannte Werte der Koeffizienten k_1, k_2 , und k_3 und der Gradienten $\mathcal{F}'(0)$ und $\mathcal{G}'(0)$, kann dann das vereinfachte ($d\zeta_{0,a}/dr = 0$) Gleichungssystem (8) explizit gelöst werden: wir bestimmen nacheinander vorerst den Wert des Formfaktors

$$\alpha = \left[\frac{-k_2(n+1)\mathcal{F}'(0)}{(3+5n)[k_3\mathcal{G}'(0) - k_1\mathcal{F}'(0)] + (n+1)k_1\mathcal{F}'(0)} \right]^{1/2} \quad (9)$$

und mit seiner Hilfe dann auch den Wert der approximativen dimensionslosen Grenzschichtdicke

$$\zeta_{0,a}^{n+1} = - \frac{(n+1)\mathcal{F}'(0)}{(3+5n)k_3\alpha} [\alpha^2\mathcal{G}'(0)^2 + \mathcal{F}'(0)^2]^{(n-1)/2}. \quad (10)$$

Berechnung des Drehmoments

Die derart gewonnenen primären Resultate der Lösung des interessierenden Problems, d. h. die Werte α und $\zeta_{0,a}$, können im weiteren zur Bestimmung der (approximativen) Werte des Drehmoments herangezogen werden, der zur Aufrechterhaltung einer stationären Rotation einer Scheibe mit endlichem Halbmesser R in einer vorgegebenen (unendlich ausgedehnten ansonst ruhenden) Potenzflüssigkeit benötigt wird. Diese vom praktischen Standpunkt aus gesehen interessante Größe kann experimentell relativ leicht gemessen werden. Wie noch im weiteren gezeigt wird, kann gegenüber solchen Experimentaldaten auch die Genauigkeit aller exakten (theoretischen), wie auch approximativen Methoden der Lösung des Problems der Scheibenrotation getestet werden.

Gehen wir von der Kräftebilanz auf einem elementaren Kreisringsegment einer beiderseitig benetzten Scheibe (siehe⁴)

$$dM_{k2} = -4\pi r^2(\tau_{\varphi z})|_{z=0} dr \quad (11)$$

aus, in die wir für den Wert der Spannung an der Scheibenoberfläche $(\tau_{\varphi z})|_{z=0}$ aus der ersten Gleichung des Systems (1) einsetzen. Durch Integration der derart modifizierten Gl. (11) resultiert bei Annahme eines endlichen Scheibenradius $R > \delta$ für das Drehmoment

$$M_{k2} = 4\pi\varrho \int_0^R \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^\delta \mathbf{v}_r \mathbf{v}_\varphi dz \right) \right] dr = 4\pi\varrho R^4 k_3 \alpha \omega^2 \delta(R). \quad (12)$$

Nach Einsetzen für $\delta(R)$ aus den Beziehungen (7) und (10) und Einführung des Momentenbeiwerts für eine beiderseitig benetzte Scheibe c_{M2} und der für Potenzflüssigkeiten verallgemeinerten Reynolds-Zahl Re_{NN} gemäß der Definitionen

$$c_{M2} = M_{k2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5\right)}, \quad Re_{NN} = R^2 \omega^{2-n} / N \quad (13), (14)$$

gewinnen wir schließlich die sog. Momentencharakteristik einer Scheibe

$$c_{M2} = 8\pi\beta_a(n) / Re_{NN}^{1/(n+1)}, \quad (15)$$

in der der vom Wert des Fließindex n und der Form der angesetzten Profile abhängige (approximative) Reibungskoeffizient $\beta_a(n)$ wie folgt gegeben ist:

$$\beta_a(n) = (k_3\alpha)^{n/(n+1)} \left\{ - \frac{(n+1) \mathcal{F}'(0)}{(3+5n)} [\alpha^2 \mathcal{G}'(0)^2 + \mathcal{F}'(0)^2]^{(n-1)/2} \right\}^{1/(n+1)}. \quad (16)$$

ERGEBNISSE UND DEREN DISKUSSION

Kriterien der Genauigkeit der Näherungsrechnung

Wie schon angedeutet, kann die Eignung der angesetzten Geschwindigkeitsprofile gemäß der Übereinstimmung der Resultate der Näherungsrechnung mit vergleichbaren Resultaten der exakten (theoretischen) Lösung der Grenzschichtgleichungen desselben Problems, eventuell durch Vergleich mit den Ergebnissen einer experimentellen Bestimmung geeigneter (integraler) Größen, beurteilt werden. Die Richtigkeit der früher veröffentlichten exakten Lösung der Hydrodynamik der Scheibenrotation in Potenzflüssigkeiten³ wurde durch die experimentelle Bestimmung des Reibungswiderstandes von Scheiben endlicher Dimensionen in ansonst ruhender Flüssigkeit beglaubigt^{4,8,9}, wo für mehrere unterschiedliche Typen von Potenzflüssigkeiten eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment festgestellt werden konnte. Die befriedigende Genauigkeit der theoretisch berechneten Geschwindigkeitsprofile wurde später auch indirekt durch deren Anwendung bei der Lösung des Problems des diffusiven Stofftransports in der Umgebung rotierender Scheiben bestätigt¹⁰⁻¹². Gegenüber derart verifizierten Ergebnissen der exakten Lösung können somit auch die Resultate des in Vorschlag gebrachten Näherungsverfahrens getestet werden.

Verwendete Geschwindigkeitsprofile

In den durchgeführten Berechnungen wurden folgende Typen von Geschwindigkeitsprofilen erprobt:

$$\mathcal{F} = (1 - Z)^l, \quad (17)$$

$$\mathcal{G} = [Z - mZ^m + (m - 1)Z^{m+1}], \quad (18)$$

$$\mathcal{G} = Z(1 - Z)^t. \quad (19)$$

Die Parameter l , m und t können, aber müssen nicht, Funktionen des Fließindex n sein; alle Parameter können in breiten Grenzen variiert werden, wobei allerdings darauf geachtet werden muß, daß durch deren eventuell nichtkorrekte Wahl nicht eine oder mehrere der früher angeführten Eigenschaften der Geschwindigkeitsprofile als solche verletzt werden.

Die Gründe für die Wahl der Profile vom Typ (17)–(19) waren vor allem folgende:

1. Für $l = 1 + 1/n$ und $m = 1 + 1/n$ resultieren aus (17) und (18) Beziehungen (Profile), die bereits Tomita¹ benutzt hat, und die für Newtonsche Flüssigkeiten ($n = 1$) in die Form

$$\mathcal{F} = (1 - Z)^2, \quad \mathcal{G} = (Z - 2Z^2 + Z^3) = Z(1 - Z)^2 \quad (20)$$

übergehen. Die Profile (20) führen bei Newtonschen Flüssigkeiten zu einer bemerkenswert guten Übereinstimmung zwischen der exakten Lösung und der Näherungsrechnung.

2. Profile vom Typ (19) wurden für ganzzahlige Werte des Parameters $t > 2$ auch in analogen Behandlungen des Problems der Scheibenrotation eingesetzt (siehe^{13,14}) und führten gleichfalls zu einer befriedigenden Genauigkeit in den approximativ berechneten Werten des Drehmoments.

3. Mit den Profilen vom Typ (17)–(19) ist mathematisch leicht umzugehen, vor allem bei der Berechnung der Integrale (6); ihr Einsatz ist – wie schon erwähnt – Hauptbedingung des im vorstehenden Absatz angedeuteten relativ sehr einfachen Rechenganges.

Bei Anwendung der Geschwindigkeitsprofile vom Typ (17)–(19) wird jede durchgerechnete Aufgabe neben dem Fließindex n noch durch zwei weitere, die Form der gewählten Geschwindigkeitsprofile charakterisierende Parameter (l und m oder l und t) beschrieben.

Auf numerischem Wege wurden nun probeweise derartige Kombinationen der Parameter l und m oder l und t gesucht, die zu einer womöglich besten Übereinstimmung zwischen den Resultaten der Näherungsrechnung und der exakten Lösung

führen, und dies im gesamten in Erwägung gezogenem Intervall des Fließindex $n \in (0,2-1,5)$, mit besonderer Berücksichtigung des Bereichs der praktisch interessantesten pseudoplastischen Flüssigkeiten, $n < 1$.

Reibungswiderstand bei der Scheibenrotation

Zwecks Beurteilung der Eignung des Näherungsverfahrens zur Bestimmung des Reibungswiderstandes von in Potenzflüssigkeiten rotierenden Scheiben führten wir die relative perzentuelle Abweichung zwischen den Werten des approximativen (siehe Gl. (16)) und des exakten (theoretischen) (siehe⁴) Reibungskoeffizienten β ein:

$$\Delta_t = \frac{\beta_a(n) - \beta_e(n)}{\beta_e(n)} \cdot 100 \quad [\%]. \quad (21)$$

Einige Ergebnisse solcher Berechnungen sind für vier Niveaus des Fließindex n und für mehrere Kombinationen der Parameter l und m bzw. l und t in der Tabelle I zusammengefaßt. In den Fällen, wo eine Abhängigkeit der Parameter vom Fließindex n erwogen wird, wurden die entsprechenden wo möglich einfachen Relationen derart angesetzt, daß die Werte aller dieser Parameter für Newtonsche Flüssigkeiten ($n = 1$) zu den Relationen $l = m = t = 2$ führen (siehe Gl. (20)). Die relative perzentuelle Abweichung einer solchen Näherungsrechnung beträgt dann nur 1%, d. h. sie ist viel geringer als z. B. bei der heutzutage schon als klassisch angesehenen Lösung nach Kármán¹⁶ und Cochran¹⁷.

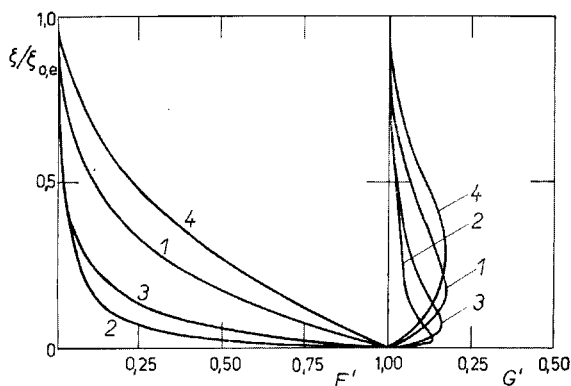


ABB. 1

Abhängigkeit der Geschwindigkeitsprofile aus der exakten Lösung (Zahlenwerte siehe³) von der normalisierten Koordinate $\zeta/\zeta_{0,e}$ für einige Werte des Fließindex n

1 $n = 1.0$, 2 $n = 0.2$, 3 $n = 0.5$, 4 $n = 1.5$.

Ausgangspunkt unserer Berechnungen waren die Δ_1 -Werte (siehe Zeile 1A in der Tabelle I), die aus der Näherungsrechnung für die von Tomita¹ vorgeschlagenen Profile

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (1 - Z)^{1+1/n}, \\ \mathcal{G} &= [Z - (1 + 1/n)Z^{1+1/n} + 1/n \cdot Z^{2+1/n}] \end{aligned} \quad (22)$$

resultieren. Ein charakteristisches Merkmal dieser Ansätze besteht darin, daß bei diesen Funktionen durch Verallgemeinerung der Parameter l und m zu Funktionen des Fließindex n eine Erhöhung der Variabilität der zum Einsatz gelangenden Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Potenzflüssigkeiten (unterschiedliche Werte des Fließindex n) angestrebt wird. Wie aus der Abb. 1 hervorgeht, in der die Geschwindigkeitsprofile aus der exakten Lösung³ in Abhängigkeit von der normalisierten Axialkoordinate $\zeta/\zeta_{0,e}$ aufgetragen sind, ist die Form der exakten Geschwindigkeitsprofile $F'(\zeta/\zeta_{0,e})$ und $G'(\zeta/\zeta_{0,e})$ in der Tat vom Fließindex n sehr stark anhängig. Aus der Abb. 1 kann teilweise auch auf einen geeigneten Typ der Abhängigkeit $l(n) = -\mathcal{F}'(0)$ geschlossen werden, die das leicht beobachtbare Absinken des Gradienten der Umfangsgeschwindigkeit an der Scheibenoberfläche bei absinkendem Fließindex n – z. B. in der Form $l(n) = 1 + 1/n$ – berücksichtigen könnte oder sogar sollte. Für eine rationelle Wahl des Geschwindigkeitsprofils der

TABELLE I

Relative perzentuelle Abweichung Δ_1 (Gl. (21)) für den Reibungswiderstand von in Potenzflüssigkeiten rotierenden Scheiben

Nr.	Parameter der Geschwindigkeitsprofile		$\Delta_1, \%$			
	Umfangsgeschw.	Radialgeschw.	$n = 0,2$	$n = 0,5$	$n = 1,0$	$n = 1,5$
1A ^a	$l = 1 + 1/n$	$m = 1 + 1/n$	-18,0	-3,7	1,0	0,0
2A	$l = 1 + 1/n$	$m = (5 - n)/2$	-11,7	-4,4	1,0	1,8
3A	$l = 1 + 1/\sqrt{n}$	$m = 1 + 1/n$	-12,4	-4,6	1,0	2,8
4A	$l = 1 + 1/\sqrt{n}$	$m = 1 + 1/\sqrt{n}$	-11,1	-6,0	1,0	5,7
5A	$l = 2/\sqrt{n}$	$m = (5 - n)/2$	-10,9	-4,9	1,0	1,1
1B	$l = 1 + 1/n$	$t = 1 + 1/n$	-17,2	-8,8	1,0	7,4
2B	$l = 1 + 1/n$	$t = (5 - n)/2$	-11,4	-6,3	1,0	7,0
3B	$l = 2/n$	$t = 1 + 1/n$	-10,9	-4,3	1,0	0,5
4B	$l = 2/n$	$t = 2/\sqrt{n}$	-10,4	-4,0	1,0	0,7
5B	$l = 2/n^2$	$t = 2/\sqrt{n}$	-7,3	-5,9	1,0	-13,9

^a Profile nach Tomita¹.

Radialkomponente \mathcal{G} ist eine analoge Überlegung bei weitem nicht so einfach, da es sich um eine komplizierte Abhängigkeit handelt, wobei überdies noch $\partial v_r / \partial z|_{z=0} \sim \alpha$ gilt, was praktisch bedeutet, daß der Gradient der Radialkomponente des Geschwindigkeitsvektors an der Scheibenoberfläche als ein Resultat der Lösung des ganzen Problems nur indirekt, d. h. durch versuchsweise Wahl plausibler Werte der Parameter m oder t , beeinflußt werden kann.

Aus dem ersten Teil der Tabelle I, die für radiale Geschwindigkeitsprofile vom Typ (18) gilt, geht hervor, daß die Genauigkeit der approximativen Bestimmung des Reibungswiderstands bei Vorgabe der von Tomita¹ in Vorschlag gebrachten Profile (Zeile 1A der Tabelle I) durch die Wahl anderer Abhängigkeiten für $l(n)$ und $m(n)$ ein wenig verbessert werden kann; für ausgeprägt pseudoplastische Flüssigkeiten ($n \approx 0,2$) liegt die derart erreichbare Genauigkeitsgrenze bei etwa -10% , was für praktische Zwecke als befriedigend angesehen werden kann.

Der zweite Teil der Tabelle I zeigt dann analoge Ergebnisse für radiale Geschwindigkeitsprofile vom Typ (19). Die Genauigkeit der errechneten Reibungswiderstände ist ungefähr die gleiche wie beim Einsatz der Profile vom Typ (18); die „besten“ Resultate (Zeile 5B der Tab. I) entsprechen dann schon verhältnismäßig extremen Werten, vor allem des Parameters $l(n)$.

Für Zwecke der Anwendung der in Vorschlag gebrachten Geschwindigkeitsprofile bei analoger Berechnung anderer Drehströmungen von Potenzflüssigkeiten ist die Feststellung von Interesse, daß die Näherungsrechnung in allen getesteten Einzelfällen bei bemerkbar pseudoplastischen Flüssigkeiten ($n < 0,5$) zu negativen Werten von Δ_t führt, was mit anderen Worten ausgedrückt bedeutet, daß aus der approximativen Lösung stets niedrigere Schätzwerte des Reibungswiderstandes (des Drehmomentes) resultieren, als aus der exakten Lösung des gleichen Problems.

TABELLE II

Relative perzentuelle Abweichung Δ_j (Gl. (24)) für den Stoff- oder Wärmestrom in der Umgebung von in Potenzflüssigkeiten rotierenden Scheiben

Nr.	Parameter der Geschwindigkeitsprofile		$\Delta_j, \%$			
	Umfangsgeschw.	Radialgeschw.	$n = 0,2$	$n = 0,5$	$n = 1,0$	$n = 1,5$
1A	$l = 2,0$	$m = 2,0$	-8,9	-5,4	-4,1	-4,1
2A	$l = 2/\sqrt{n}$	$m = 1 + n$	0,9	-1,6	-4,1	-5,7
3A	$l = n + 1/n$	$m = 1 + n$	-2,7	0,7	-4,1	-11,2
1B	$l = 2,0$	$t = 1 + 1/\sqrt{n}$	-0,8	-2,4	-4,1	-5,5
2B	$l = 1 + 1/n$	$t = 2/n$	0,9	-0,8	-4,1	-6,5

Bestätigung oder Widerlegung dieser Behauptung für andere Rotationskörper (z. B. für eine in Potenzflüssigkeiten rotierende Kugel) wäre nur durch Gegenüberstellung von Messungen und Rechnung möglich.

Stoff- (oder Wärme-)transport in der Umgebung einer rotierenden Scheibe

Alle bisher bekannten Lösungen^{10-12,15} des Problems des Stoffüberganges zur (oder von) einer in einer Potenzflüssigkeit rotierenden Scheibe basieren auf den Werten des Gradienten der (dimensionslosen) Radialgeschwindigkeit an der Scheibenoberfläche. Bei Anwendung der Methode der Integralbedingungen gilt für den approximativen Wert dieser Größe a_a unter Einbeziehung der Gl. (18) und (19) die Beziehung

$$a_a = \left. \frac{d(\mathbf{v}_r/r\omega)}{d\zeta} \right|_{z=0} = \alpha/\zeta_{0,a}. \quad (23)$$

Durch Vergleich dieser Größe mit den Werten des analogen exakten Gradienten $a_e = G''(0)$, der aus der Theorie der (reinen) Hydrodynamik der Scheibenrotation in Potenzflüssigkeiten³ bekannt ist, kann dann die Anwendbarkeit der Ergebnisse der Näherungslösung der rein hydrodynamischen Aufgabe auch für die mit der Scheibenrotation verbundenen Transportprobleme (Stoff- oder Wärmeübergang zur oder von der Scheibe) getestet werden, und dies vorteilhaft durch Vergleich der entsprechenden Stoff- oder Wärmeströme, die den Kubikwurzeln der approximativ oder exakt berechneten Gradienten der Radialgeschwindigkeit an der Scheibenoberfläche proportional sind^{10-12,15}. Für die relative prozentuelle Abweichung zwischen den approximativen und exakten Strömen zur oder von der Scheibe gilt dann offensichtlich

$$\Delta_j = \frac{j_a - j_e}{j_e} 100 = \left[\left(\frac{\alpha/\zeta_{0,a}}{a_e} \right)^{1/3} - 1 \right] \cdot 100 \quad [\%]. \quad (24)$$

Die Ergebnisse einiger solcher Berechnungen zeigt die Tabelle II, und dies wiederum für vier unterschiedliche Niveaus des Fließindex n und unterschiedliche Geschwindigkeitsprofile. Aus den angeführten Zahlenwerten ist ersichtlich, daß die Genauigkeit der Resultate aus der Näherungsrechnung bei deren Anwendung für die Bestimmung des Stoff- oder Wärmetransports zur oder von einer rotierenden Scheibe durch gezielte Wahl plausibler Geschwindigkeitsprofile unter die Grenze von $\pm 5\%$ gesenkt werden kann; auch die einfachsten, die sog. „Newtonschen“ Profile, in denen der Fließindex nicht explizit auftritt, (Zeile 1A in der Tab. II) entsprechen praktischen Anforderungen recht gut.

Interessant ist überdies die Feststellung, daß sich als optimal für die Berechnung der Transportprobleme in der Umgebung einer rotierenden Scheibe völlig andere

Formen von Geschwindigkeitsprofilen erwiesen haben als die, die zur besten Übereinstimmung was den Reibungswiderstand anbelangt geführt haben. Zur Information kann vielleicht angeführt werden, daß für alle in der Tabelle I angeführten Profile die entsprechenden Δ_j -Werte für $n = 0,2$ zwischen 30–65%, für $n = 0,5$ dann zwischen 15–35%, d. h. signifikant über den Werten aus der Tabelle II liegen.

Auch für den Fall des Stoff- oder Wärmetransports zu (oder von) anderen axial-symmetrischen in Potenzflüssigkeiten rotierenden Körpern müßte die Eignung des aufgezeigten Näherungsverfahrens und der in der Tabelle II angeführten Profile in erster Reihe durch Vergleich der errechneten Ströme mit den Resultaten geeignet gewählter Experimente getestet werden.

SCHLUSSFOLGERUNGEN

Auf Grund der präsentierten Ergebnisse, wie auch einer Reihe weiterer Berechnungen¹⁸, kann gefolgert werden, daß die approximative Methode der Integralbedingungen für den Impuls bei Anwendung auf das Problem der Scheibenrotation in nicht-Newtonischen Potenzflüssigkeiten bei gezielter Wahl beider in Frage kommenden Geschwindigkeitsprofile zu für die Praxis befriedigenden Resultaten führt, und dies sowohl was den Reibungswiderstand, als auch die Lösung weiterer Transportprobleme in der diskutierten geometrischen Anordnung anbelangt. Es kann erwartet werden, daß vergleichbar gute Resultate bei Einsatz derselben Methode auch bei anderen axialsymmetrischen Rotationsströmungen nicht-Newtonscher Potenzflüssigkeiten zu gewinnen wären.

ANHANG

Versuche zur Verallgemeinerung des Verfahrens nach Kármán

In der ersten Phase dieser Studie¹⁸ wurden Versuche angestellt das oben formulierte interessierende Problem durch Verallgemeinerung des klassischen Verfahrens nach Kármán¹⁶ und Cochran¹⁷ auf die Klasse nicht-Newtonscher Potenzflüssigkeiten zu lösen. Hierbei wären für die Geschwindigkeitsprofile $\mathcal{F}(Z)$ und $\mathcal{G}(Z)$ Polynome dritten, bzw. vierten Grades zu wählen, die neben den Randbedingungen (4) und (5) noch weitere Bedingungen betreffend die zweiten Ableitungen an der Scheibenoberfläche zu erfüllen hätten, die sich aus der Forderung der Erfüllung der Grenzschichtgleichungen des zu lösenden Problems (siehe³) an der Oberfläche der Scheibe ($z = 0$) ergeben. Die diesen Forderungen entsprechende Form der Geschwindigkeitsprofile

$$\mathcal{F} = \left(1 - \frac{3}{2}Z + \frac{Z^3}{2}\right) - \frac{\zeta_{0,a}^{n+1} X}{4} (Z - 2Z^2 + Z^3), \quad (25)$$

$$\mathcal{G} = (Z - 3Z^3 + 2Z^4) - \frac{\zeta_{0,a}^{n+1} Y}{\alpha} \left(\frac{Z^2}{2} - Z^3 + \frac{Z^4}{4}\right), \quad (26)$$

mit

$$X = \frac{(n-1) D_0^{(n-3)/2} \mathcal{F}'(0) \alpha \mathcal{G}'(0)}{n D_0^{n-1}}, \quad (27)$$

$$Y = \frac{D_0^{(n-1)/2} + (n-1) D_0^{(n-3)/2} \mathcal{F}'(0)^2}{n D_0^{n-1}}, \quad (28)$$

$$D_0 = \mathcal{F}'(0)^2 + \alpha^2 \mathcal{G}'(0)^2 \quad (29)$$

ist offensichtlich weit komplizierter als bei Newtonschen Flüssigkeiten, wo für $n = 1$ $X = 0$ und $Y = 1$ gilt. Viel komplizierter ist im Falle der nicht-Newtonschen Potenzflüssigkeiten auch das Ergebnis nach Einsetzen der Geschwindigkeitsprofile (25) und (26) in die Integralbedingungen (I). Die resultierenden stark nichtlinearen Gleichungen für die gesuchten Unbekannten $\zeta_{0,a}$ und α sollen hier nicht angeführt werden; wir möchten lediglich drei Feststellungen hervorheben, die bei Versuchen um die Lösung dieses Gleichungssystems gewonnen wurden.

1. Brauchbare Resultate gelang es nur für relativ enge Bereiche des Fließindex $n \in (0,728$ bis $1,00)$ und $n \in (1,00 - 1,12)$ zu gewinnen. Außerhalb dieses Intervalls hatte das zu lösende System zweier nichtlinear Gleichungen entweder keine reale Lösung oder aber führte die Lösung zu physikalisch nichtakzeptablen Endresultaten (negative Werte des Reibungskoeffizienten, negative Werte der in der Schlußphase berechneten (radialen) Geschwindigkeiten).

Zu erwähnen wäre, daß über eine analoge Beschränkung der Möglichkeit bei der Anwendung der Impulsbedingung physikalisch sinnvolle Resultate zu gewinnen, schon früher¹⁹ bei der Lösung der entsprechenden Gleichungen der zweidimensionalen axialsymmetrischen Grenzschichtströmung von Potenzflüssigkeiten berichtet wurde. Für pseudoplastische Flüssigkeiten war die Lösung nur für Fließindexe aus dem Intervall $n \in (0,736 - 1,00)$ möglich, d. h. in einem Bereich, der auffallend mit den bereits erwähnten Zahlenwerten übereinstimmt.

TABELLE III

Relative perzentuelle Abweichung Δ_t (Gl. (27)) für den Reibungswiderstand von in Potenzflüssigkeiten rotierenden Scheiben bei Anwendung der Geschwindigkeitsprofile (25) und (26)

Fließindex	β_c^a	β_a	$\Delta_t, \%$
0,728	0,1774	0,4397	148
0,730	0,1772	0,4515	155
0,750	0,1752	0,4971	184
0,800	0,1704	0,2530	48,4
0,900	0,1615	0,1786	10,6
1,000 ^b	0,1539	0,1342	-12,8
1,100	0,1473	0,1026	-30,3
1,120	0,1462	0,0973	-33,4

^a Übernommen aus³, gegebenenfalls interpoliert aus der Beziehung

$$\beta_c(n) = 0,1539 \cdot (6,13)^{(1-n)/2(1+n)}$$

^b Lösung von Kármán¹⁶ und Cochran¹⁷.

2. Im Bereich der annehmbaren Lösung führt dann die Näherungsrechnung, die sich der Geschwindigkeitsprofile (25) und (26) bedient, zu wesentlich schlechteren Ergebnissen als beim Einsatz der einfacheren Beziehungen aus der Tabelle I. Nicht einmal für Newtonsche Flüssigkeiten ist die Übereinstimmung besonders gut (Tab. III).

3. Die Forderung nach der Erfüllung der Grenzschichtgleichungen auch an der Oberfläche der Scheibe, die zu weiteren ergänzenden Bedingungen für die Werte der zweiten Ableitungen der in Frage kommenden Geschwindigkeitsprofile an der Oberfläche führt, ist demnach — wie auch schon früher Kármán²⁰ konstatieren mußte — sehr stark. Überdies führt sie zur expliziten Einführung der Unbekannten $\zeta_{0,a}$ in die Geschwindigkeitsprofile, zu einer hierdurch verursachten Komplikation der Berechnungsgleichungen und wirkt sich wider Erwarten nicht einmal günstig auf die Genauigkeit der Werte des approximativ berechenbaren Reibungswiderstands aus. Deshalb wurden für die Lösung der Impulsbedingungen bei der Scheibenrotation in Potenzflüssigkeiten die wesentlich einfacheren Geschwindigkeitsprofile vom Typ (17) bis (19) eingesetzt, die auf mathematisch viel einfacherem Wege zu nachweisbar genaueren Endresultaten führen.

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

c_{M2}	Momentenbeiwert einer beiderseitig benetzten Scheibe, Gl. (13)
F', G'	Geschwindigkeitsfunktionen aus der exakten Lösung ³
\mathcal{F}, \mathcal{G}	Geschwindigkeitsansätze für die approximative Lösung
j	Stoff- (oder Wärme-) strom zur (oder von) der Scheibe (siehe ¹⁵)
k_1, k_2, k_3	Integrale der Geschwindigkeitsprofile, Gl. (6)
K	Konsistenzkoeffizient, Stoffparameter des Potenzgesetzes
M_{k2}	Drehmoment einer beiderseitig benetzten Scheibe
n	Fließindex, Stoffparameter des Potenzgesetzes
$N = K/\varrho$	
r	Radialkoordinate ($r = 0$ bedeutet die Scheibenachse)
R	Halbmesser der Scheibe
Re_{NN}	verallgemeinerte Reynolds-Zahl für Drehströmungen nicht-Newtonscher Potenzflüssigkeiten, Gl. (14)
v_r, v_φ	Radial- und Umfangskomponente des Geschwindigkeitsvektors
z	Axialkoordinate ($z = 0$ bedeutet die Scheibenoberfläche)
$Z = z/\delta$	
α	Formparameter
β	Reibungskoeffizient, Gl. (16)
δ	Grenzschichtdicke
Δ	relative prozentuelle Abweichung zwischen den Resultaten der approximativen und der exakten Lösung, Gl. (21) und (24)
$\tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$	Komponenten des Spannungstensors
ζ_0	(dimensionslose) Grenzschichtdicke, Gl. (7)
ϱ	Dichte der Flüssigkeit
ω	Winkelgeschwindigkeit der Scheibenrotation

Untere Indexe:

a	aus der approximativen Lösung
e	aus der exakten Lösung
j	betrifft den Stoff- oder Wärmestrom
t	betrifft den Reibungswiderstand

LITERATUR

1. Tomita Y.: Bull. Jap. Soc. Mech. Engrs 4, 671 (1961).
2. Mitschka P. in der Sammelschrift: *Teplo i Massoperenos*, Teil III, S. 250. Minsk 1972.
3. Mitschka P., Ulbrecht J.: diese Zeitschrift 30, 2511 (1965).
4. Mitschka P., Ulbrecht J.: Appl. Sci. Res. 15A, 345 (1966).
5. Dorfman L. A.: *Hydrodynamic Resistance and Heat Loss of Rotating Solids*. Oliver & Boyd, Edinburgh—London 1963.
6. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N.: *Transport Phenomena*. Wiley, New York 1960.
7. Schlichting H.: *Grenzschichttheorie*. Braun Verlag, Karlsruhe 1958.
8. Ulbrecht J., Wichterle K.: Chem.-Ing.-Tech. 39, 656 (1967).
9. Kale D. D., Mashelkar R. A., Ulbrecht J.: Nature (Phys. Sci.) 242, 29 (1973).
10. Shulman Z. P., Pokryvaylo N. A., Kordonskii V. I., Nesterov A. K.: Int. J. Heat Mass Transfer 16, 1339 (1973).
11. Paterson J. A., Greif R., Cornet I.: Int. J. Heat Mass Transfer 16, 1017 (1973).
12. Greif R., Paterson J. A.: Phys. Fluids 16, 1816 (1973).
13. Rajeswari G. K.: ZAMP 13, 443 (1962).
14. Rajeswari G. K.: ZAMM 44, 193 (1964).
15. Mitschka P.: Wärme-Stoffübertrag., im Druck.
16. Kármán T.: ZAMM 1, 244 (1921).
17. Cochran W. G.: Proc. Cambr. Phil. Soc. 30, 365 (1934).
18. Mitschka P.: Unveröffentlichte Ergebnisse.
19. Bizell G. D., Slattery J. C.: Chem. Eng. Sci. 17, 777 (1962).
20. Kármán T. in der Sammelschrift: *Grenzschichtforschung* (H. Görtler, Ed.), S. 81. Springer Berlin 1958.

Übersetzt vom Author.